

REGLAS FUNDAMENTALES DE DIFERENCIACION

POR

CARLOS WARGNY

(*Conclusion*)

$$d\frac{a+x}{a-x} = \frac{2\,adx}{(a-x)^2} \therefore dy = \frac{a}{a-x}\left(\frac{2}{a-x}\,\text{arctg}\,\frac{a-x}{a+x} - \frac{a+x}{a^2+x^2}\right).$$

360. H. Lamb. Infinitesimal Calculus.

pág. 41: sen $h\ x = a + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

p. 71: funciones normales: x^m, sen x, e^x,

p. 79: $D\,x^m\,(1-x)^n = -x^m.\ n\,(1-x)^{n-1} + (1-x)^n.\ m\,x^{m-1}$

$$= x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,[\,m-(m+n)\,x\,]$$

p. 80: función hiperbólica: D sen $h\,x = D\,\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x})$ $=$ cos $h\ x$.

p. 89: D arctg $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = D$ arctg $u = \frac{Du}{1+u^2}$

$$1+u^2=\frac{(1-x+x^2)^2+(1+x+x^2)^2}{(1-x+x^2)^2}=\frac{2\,(1+3\,x^2+x^4)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$D\,u=\frac{(1-x+x^2)\,(1+2\,x)-(1+x+x^2)\,(-1+2\,x)}{(1-x+x^2)^2}=\frac{2\,(1-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$\therefore\; D\,y=\frac{1-x^2}{1+3x^2+x^4}$$

Para difereaciar $y=\mathrm{L}\,x$. acudimos á la inversa

$$e^y=x\;\therefore\; d\,x=e^y\,dy\;\therefore\; dy=\frac{dx}{e^y}=\frac{dx}{x}$$

361. Siendo $u=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, demostrar que

$$du:d\,x=1-u^2. \qquad \text{(Hall, 28).}$$

Devidiremos: $$\frac{du}{dx}=\frac{(e^x-e^{-x})^2-(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$$

$$=1-\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^2=1-u^2$$

2. Valor que debe tener x para que tg $\frac{\pi x}{x+1}$ deje de ser contínua. (Fabry, 9).

Sea $\frac{\pi\,x}{x+1}=90^{\circ}=\frac{\pi}{2}\;\therefore\; x=1$. En efecto tg $\frac{\pi}{2}=\infty$.

Los diferentes valores que puede tener x salen de $\frac{\pi\,x}{x+1}$ $=(2\,k+1)\,\frac{\pi}{2}\;\therefore\; x=\frac{2\,k+1}{1-2\,k}$.

3. Demostrar que $\frac{d\,(x\,z\,t\ldots)}{x\,z\,t\ldots} = \frac{dx}{x} + \frac{dz}{dz} + \frac{dt}{t} + \ldots$

(Bouasse, 2).

Sabemos que $d\,(x\,z\,t) = z\,t\,d\,x + x\,t\,d\,z + x\,z\,dt$; dividamos por $x\,z\,t$:

$$\frac{d\,(x\,z\,t)}{x\,z\,t} = \frac{d\,x}{x} + \frac{d\,z}{z} + \frac{dt}{t}.$$

De ésto, por induccion, sabe la proposición general.

4. Demostrar que

$$\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{sen}\,x}{b+a\cos x} = \text{arc cos}\,\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$$

(Comberousse, 510).

Diferenciemos:

$$\frac{d\,\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{sen}\,x}{b+a\cos x}}{1+\left(\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}\,\text{sen}\,x}{b\quad a\cos x}\right)^2} = -\frac{d\,\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)^2}}$$

$$\frac{(b+a\cos x)\sqrt{a^2-b^2}\cos x+\sqrt{a^2-b^2}\,\text{sen}^2\,x}{(b+a\cos x)^2+(a^2-b^2)\,\text{sen}^2\,x}$$

$$= \frac{a\,(a+b\cos x)\,\text{sen}\,x-b\,(b+a)\cos x\,\text{sen}\,x}{(a+b\cos x)\sqrt{(a+b\cos x)^2-(b+a\cos x)^2}},$$

Efectuando y reduciendo, se obtiene:

$$\frac{b\sqrt{a^2-b^2}\cos x+a\sqrt{a^2-b^2}}{b^2+2\,ab\cos x+a^2-b^2\,\text{sen}^2\,x}=\frac{a^2\,\text{sen}\,x-b^2\,\text{sen}\,x\cos x}{(a+b\cos x)\,\text{sen}\,x\,\sqrt{a^2-b^2}}$$

ó bien, $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$

5. Probar que

$$\text{sen}^2\,x\,\frac{d}{dx}\,\text{sen}^m\,x\,\text{sen}\,m\,x=m\,\text{sen}^{m+1}\,x\,\text{sen}\,(m+1)\,x$$

(Williamson, 3)

$$D_x\,(\text{sen}^m\,x\,\text{sen}\,m\,x)=m\,\text{sen}^m\,x\cos m\,x$$
$$+m\,\text{sen}\,m\,x\,\text{sen}^{m-1}\,x\cos x$$
$$=m\,\text{sen}^{m-1}\,x\,(\text{sen}\,x\cos m\,x+\text{sen}\,m\,x\cos x)$$
$$=m\,\text{sen}^{m-1}\,x\,\text{sen}\,(m+1)\,x$$

Multiplicamos ahora por $\text{sen}^2\,x$.

6. Invertir la función $y=\text{arc tg}\,\dfrac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}$.

(Williamson, 28)

$$\text{tg}\,y=\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\;\therefore\;\frac{\text{tg}\,y+1}{\text{tg}\,y-1}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{(\text{tg}\,y+1)^2+(\text{tg}\,y-1)^2}{(\text{tg}\,y+1)^2-(\text{tg}\,y-1)^2}=\frac{(1+x^2)+(1-x^2)}{(1+x^2)-(1-x^2)},$$

$$\frac{\text{tg}^2\,y+1}{2\,\text{tg}\,y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\sec^2\,y}{2\,\text{tg}\,y}\;\therefore\;x^2=\text{sen}\,2\,y,$$

Diferenciemos, $2\,x\,d\,x = \cos 2\,y \,.\, d\,2\,y = 2\cos 2\,y\,dy$

$\therefore\ dy = \dfrac{x\,d\,x}{\cos 2\,y}$; y como $\operatorname{sen} 2\,y = x^2$, $\cos 2\,y = \sqrt{1 - x\,4}$,

$$\therefore\ dy = \frac{x}{1 - x\,4}\,dx$$

7. De $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2\,x + \ldots + \cos n\,x = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,(2\,n+1)\,x}{2\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,x}$,

deducir el valor de la siguiente suma:

$S = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2\,x + \ldots + n\operatorname{sen} n\,x.$ (Tannery, 173)

Diferenciamos la primera igualdad:

$-\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2\,x - \ldots - n\operatorname{sen} n\,x$

$$= \frac{(2\,n+1)\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,x \cos \frac{1}{2}\,(2\,n+1)\,x - \operatorname{sen} \frac{1}{2}\,(2\,n+1)\,x \cos \frac{1}{2}\,x}{4\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\,x}$$

$$\therefore\ S = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{2\,n+1}{2}\,x \cot \frac{1}{2}\,x - (2\,n+1)\cos \frac{1}{2}\,(2\,n+1)\,x}{4\operatorname{sen} \frac{1}{2}\,x}$$

8. La derivada de $y = \dfrac{1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \ldots}{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \ldots} = \dfrac{u}{v}$

es $-(y^2+1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\left(-x + \dfrac{x^3}{3!} = \dfrac{x^5}{5!} + \ldots\right) - u\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots\right)}{v^2}$$

$$= \frac{-v^2 - u^2}{v^2} = -\left(1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2\right) = -(1 + y\,2).$$

9. Sea $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+x^2+\ldots+x^n$; encontrar la suma $S=1+2\,x+3\,x^2+\ldots+n\,x^{n-1}$. (Lamb, 95)

Diferenciamos la primera igualdad:

$$\frac{(1-x).-(n+1)\,x^n-(1-x).^{n+1}-x}{(1-x)^2} = 1+2\,x+\ldots+n\,x^{n-1},$$

$$\therefore S = \frac{n\,x^{n+1}-(n+1)\,x^n+1}{(1-x)^2}$$

370. $f\,x=x \text{ sen } \dfrac{1}{x}$ no tiene derivada para $x=o$.

(Humbert, 12)

$$f'x=x \cos\frac{1}{x}.-\frac{1}{x^2}+\text{sen}\frac{1}{x}$$
$$=\text{sen}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

Si x o, $f'(o)=\text{sen}\,\infty-\infty\cos\infty$.

* **32. Integrales.**—Verificar las igualdades que siguen:

371. $d\dfrac{x^{n+1}}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(n+1)\,x^{n+1-1}\,dx=x^n d\,x$

2. $d\,\text{L}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}\,d\,[\text{L}\,(1+x)-\text{L}\,(1-x)]$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{d\,x}{1+x} + \frac{d\,x}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}\,d\,x$$

3. $D_x \, \mathrm{L}\,(x+\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

4. $D_x \dfrac{(a\,x+b)^{n+1}}{a\,(n+1)} = \dfrac{(n+1)\,(ax+b)^n.\,a}{a\,(n+1)} = (ax+b)^n$

5. $D_x\, x\,\mathrm{L}\,\dfrac{x}{e} = x\,(\mathrm{L}\;x - \mathrm{L}\;e) = \mathrm{L}\;x$

6. $D_x\,\mathrm{L}\;\mathrm{sen}\;x = \dfrac{\cos x}{\mathrm{sen}\;x} = \cot x$

7. $d\,x\;\mathrm{arc\;sen}\;x + \sqrt{1-x^2} = x\dfrac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{arc\;sen}\;d\,x$

$$.-2\;x\,d\,x = \mathrm{arc\;sen}\;x\,d\,x$$

8. $D_x\,\mathrm{L}\;\mathrm{tg}\;x = \dfrac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}\;x} = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\;x\cos x} = \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,2x}.$

9. $D^x\,\dfrac{1}{b}\;\mathrm{L}\;(a-b\;\cos\theta) = \dfrac{1}{b}\;\dfrac{a\;\mathrm{sen}\;\theta}{a-b\;\cos\theta} = \dfrac{\mathrm{sen}\;\theta}{a-b\;\cos\theta}$

330. $$D_x \frac{2}{\sqrt{4\,a\,c-b^2}} \text{ arc tg } \frac{2\,c\,x+b}{\sqrt{4\,ac-b^2}} = \frac{1}{a+bx+cx^2}.$$

1. $$D_x \text{ arc sen } \frac{x-2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\,x-x^2}}.$$

2. $$D_x \text{ L tg } (\tfrac{1}{4}\,\pi+\tfrac{1}{2}\,x)=\sec\,x.$$

3. $$D_x \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \text{ L } \frac{\sqrt{b-a}\text{ tg }\frac{1}{2}\,x+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\text{ tg }\frac{1}{2}\,x-\sqrt{b+a}} = \frac{1}{a+b\cos\,x}$$

4. $$D_x \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \text{ arc tg } \frac{a\text{ tg }\frac{1}{2}\,x+b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{a+b\text{ sen }x}$$

5. $$D_x \text{ L } (\text{L }x) = \frac{1}{x\text{ L }x}$$

6. $$D_x \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ L}\left(\text{tg } \frac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\text{ arc cos } \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{a\text{sen }x+b\cos\,x}$$

7. $$D_x\,\tfrac{1}{4}\,\frac{x+1}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\text{ arc tg }x+\tfrac{1}{4}\text{ L }\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=(x^5+x^4+2\,x^3+x^2+x+1)^{-1}$$ (Grégory, 264)

8. $$d\,\tfrac{1}{6}\,\mathrm{L}\,\frac{1+x}{1-x}\sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}\,x}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{1-x^6}\,d\,x.$$

9. $$d\,\cos^2 a\,\mathrm{L}\,\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}-x\,\operatorname{sen} a\,\cos a$$

$$=\frac{d\,x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}$$ (Tannery, 553)

390. $$d\,\tfrac{1}{2}\,x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\,\mathrm{L}\,(x+\sqrt{a^2-x^2})$$

$$=\sqrt{a^2+x^2}\,d\,x$$

1. $$d\,\tfrac{1}{2}\,(\text{arc sen}\,x+x\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}\,d\,x$$

2. $$d\,\tfrac{1}{2}\,x\sqrt{x^2-1}-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{L}\,(x+\sqrt{x-1})=\sqrt{x^2-1}\,dx$$

3. $$d\left[\tfrac{6}{7}\,x^{\frac{7}{6}}+\tfrac{6}{5}\,x^{\frac{5}{6}}+\tfrac{3}{2}\,x^{\frac{2}{3}}+2\,x^{\frac{1}{2}}-3\,x^{\frac{1}{3}}-6\,x^{\frac{1}{6}}+3\,\mathrm{L}\,(x^{\frac{1}{3}}+1)\right.$$
$$\left.+6\,\text{arc tg}\,x^{\frac{1}{6}}\right]=\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,d\,x.$$ (Serret, 24)

4. $$d\,\tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x-\tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x=\operatorname{sen}^4 x\,\cos^3 x\,d\,x$$

5. $$2\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{a-x}{a-b}},\ 2\,\text{arc sen}\sqrt{\frac{x-b}{a-b}},\ 2\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{x-b}{a-x}},$$

arc sen $\left[2\sqrt{\frac{(a-x)\ (x-b)}{a-b}}\right]$, tienen la misma derivada

$1 : \sqrt{(a-x)\ (x-b)}$ (Hardy, 217)

6. $$X = a + b \cos x + c \operatorname{sen} x$$

$$\therefore\ D_x \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}} \operatorname{arc\ cos} \frac{a\ X - a^2 + b^2 + c^2}{X\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{1}{X}$$

7. $$D_x \left[\tfrac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tfrac{1}{2} \operatorname{L} \frac{1+(x\sqrt{2}+1)^2}{1+(1-x\sqrt{2})^2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\ tg}\right.$$

$$\left.(x\sqrt{2}+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\ tg}\ (1-x\sqrt{2})\right| = \frac{x^6}{x^4+1}$$ (Baire, 87)

8. $$Dx\left[\tfrac{1}{2} \operatorname{L} x - \tfrac{2}{3} \operatorname{L}(x-1) + \frac{5}{14} \operatorname{L}\ (x-2) - \frac{2}{21} \operatorname{L}\ (x^2+x+1)\right.$$

$$\left. - \frac{2}{7\sqrt{3}} \operatorname{arc\ tg} \frac{2\ x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{x^2+2}{x\ (x-1)\ (x-2)\ (x^2+x+1)}$$

(Wilson, 20)

9. $$d\left[\tfrac{3}{2}\ x + \left(\tfrac{3}{2} \cos x + \cos^3 x\right) \operatorname{sen} x\right] = 4 \cos^4 x\ d\ x$$

(de la Vallée-Poussin, 72)

400. $$D_x \left[\frac{1}{\sqrt{a\ m^2+2\ m+c}} \operatorname{L}\left(\sqrt{a\ m^2+2\ m+c}\right)\right.$$

$$+\ L\left(\frac{\sqrt{a\ x^2+2\ b\ x+c}-\sqrt{a\ m^2+2\ b\ m+c}}{x-m}-m\ a-b\right)\Bigg]$$

$$=\frac{1}{(x-m)\ \sqrt{ax^2+2\ b\ x+c}}. \qquad \text{(Humbert, 222)}$$

---

33. *Función de función.*—La diferenciación por sustitución (N.º 23) consiste en representar por una sola letra u la variable x y los diversos signos de operación que la afectan. Por ejemplo, en la función compuesta $y=-a\ x$, la variable x está sometida al signo de substracción y al de multiplicación del coeficiente a. Hacemos $a\ x=u$ y formamos la función simple $y=-u$; diferenciamos y se obtiene la diferencial

$$d\ y=-du=-a\ d\ x,$$

cuyo coeficiente diferencial es un *producto* de dos derivadas: -1, derivada de $-u$; y a, derivada de $a\ x$.

Representemos, ahora, $y=-u$ por f

$$y=f\ u; \qquad \text{(A)}$$

y $u=a\ x$ por $\varphi\ x$:

$$u \quad \varphi \qquad \text{(B)}$$

Sustituímos (B) en (A) y se construye la función doble

$$y=f\ (\varphi\ x),$$

conocida con el nombre de *función de función.*

Para derivarla se aplica la regla que pasamos a establecer: Diferenciemos separadamente las funciones (A) y (B):

$$d\,y = f'\,u\,du, \qquad du = \varphi'\,x\,d\,x;$$

reemplacemos $d\,u$ en $d\,y$:

$$d\,y = f'\,u.\,\varphi'\,x.\,d\,x,$$

ó bien,

$$D_x f\,(\varphi\,x) = f'\,u.\,\varphi'\,x.$$

Esto es, la derivada de una función de función es igual al *producto* de las derivadas de cada función.

Ejercicio 371. $y = -a\,x = -u.$

$\varphi\,x = a\,x \therefore \varphi'\,x = a$ $f\,u = u \therefore f'\,u = -1$	$\therefore D_x f\,(\varphi\,x) = -1.\,a = -a$

2. $y = (a\,x + b)^n = u^n.$

$\varphi\,x = ax + b \therefore \varphi'\,x = a$ $f\,u = u^n \therefore f'\,u = n\,u^{n-1}$	$\therefore D_x f = a\,n\,(ax+b)^{u-}$

3. $y = \mathrm{L}$ sen $x = \mathrm{L}\,u.$

$\varphi\,x = \text{sen}\,x \therefore \varphi'\,x = \cos x$ $f\,u = \mathrm{L}\,u \therefore f'\,u = \frac{1}{u}$	$\therefore D_x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \cot x$

4. $y = \cos x = \text{sen}\,(90^\circ - x) = \text{sen}\, u$

$\varphi\, x = 90^\circ - x \therefore \varphi'\, x = -1$
$f\, u = \text{sen}\, u \therefore f\, u = \cos u$
$\therefore Dx = -\cos(90^\circ - x) = -\text{sen}\, x$

5. $y = \text{arc sen tg}\,(a - b\, x) = \text{arc sen tg}\, u.$

En este ejemplo, hacemos $a - b\, x = u = \varphi\, x$; $\text{tg}\, u = v = F\, u$; $\text{arc sen}\, v = f\, v$. Sustituimos estos diversos valores y se forma la función triple ó *función de funciones*

$$y = f\,[\,F\,(\varphi\, x)\,],$$

cuya derivada ha de ser el producto de tres derivadas:

$$D_x f\,[\,F\,(\varphi\, x)\,] = f'\, v.\ F'\, u.\ \varphi'\, x.$$

$f'\, v = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$, $F'\, u = \sec^2 u$, $\varphi'\, x = -b.$

$$\therefore D_x = -b \sec^2 (a - b\, x) \frac{1}{\sqrt{1 - \text{tg}^2\,(a - b\, x)}}$$

34. Diferenciación parcial.—Sean u y v dos funciones de x, y sea

$$y = f\,(u, v).$$

Para encontrar la diferencial de esta función compuesta, podemos hacer variar primeramente a u, suponiendo v cons tante, lo que denotamos así:

$$y+d_u\, y=f\,(u+du,\, v);$$

restamos, en seguida, la función primitiva y se obtiene el crecimiento *parcial* de y:

$$d_u\, y=f\,(u+d\, u,\, v)-(fx,\, y), \qquad (A).$$

La notación $d_u\, y$ se lée: «diferencial parcial de y respecto de u».

Del mismo modo procederíamos con v, suponiendo u constante,

$$d_v\, y=f\,(u,\, v+dv)-f\,(x,\, y. \qquad (B).$$

Esta sería la diferencial parcial de y respecto de v. Ahora hagamos variar simultáneamente a u y v:

$$y+d\, y=f\,(u+du,\, v+dv);$$

y restemos la función primitiva; resulta la diferencial *total*

$$d\, y=f\,(u+du,\, v+dv)-f\,(x,\, y), \qquad (C).$$

que podemos escribir así

$$d\, y=f\,(u+du,\, v+dv)-f\,(u,\, v+dv)$$
$$+f\,(u,\, v+dv)-f\,(u,\, v).$$

En los dos primeros términos, $v+dv$ es constante y u es variable; luego, estos dos términos son iguales a la diferencial parcial de y respecto de u, esto es, $d_u\, y$; y en los dos últimos términos u es constante y v variable; por lo cual equivalen a $d_v\, y$. En consecuencia, el valor (C) es la suma de (A) y (B), o bien,

$$\boxed{d\,y = d_u\, y + d_v\, y}$$

lo que tambien se escribe así:

$$d_{u\,v} = d_u + d_v.$$

En otros términos, la diferencial total es igual a la suma de las diferenciales parciales.

Ejercicio 376. $u = x + y$

$$d_x = dx,\ d_y = d\,y \quad \therefore \quad d\,u = d\,x + d\,y$$

Esta es la tercera regla fundamental.

7. $z = x\,y.$ $\qquad d_x = y\,dx,\ d_y = x\,d\,y$

$$\therefore \quad d\,z = y\,d\,x + x\,d\,y.$$

Tal es la fórmula de un producto de funciones.

8. $u=\frac{x}{y}$. $\qquad d_x=\frac{1}{y}d\,x,\; d_y=-\frac{x}{y^2}\,dy$

$$\therefore\; d\,u=\frac{d\,x}{y}-\frac{x\,d\,y}{y^2}=\frac{y\,d\,x-x\,d\,y}{y^2}$$

Fórmula del cuociente de funciones.

9. $u=x^m\,y^n$.

$$d_x=m\,x^{m-1}\,y^n\,d\,x,\; d_y=n\,x^m\,y^{n-1}\,d\,y$$

$$\therefore\; d\,u=m\,x^{m-1}\,y^n\,d\,x+n\,x^m\,y^{n-1}\,d\,y$$

380. $z=\frac{a\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. $\qquad d_x=-a\,y\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{3}}\,d\,x$

$$d_y=[-a\,y^2\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}+a\,(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}]\,d\,y$$

$\therefore\; d\,z=(a\,x^2\,d\,y-a\,x\,y\,d\,x)\,(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ (Slurm, I, 88)

1. $z=x\,\mathrm{L}\,y$. $\qquad d_x=\mathrm{L}\,y\,d\,x,\; d_y=x\,\frac{d\,y}{y}$

$$\therefore\; d\,z=\mathrm{L}\,y\,d\,x+\frac{x}{y}\,d\,y$$

2. $u=x^y$. $\qquad d_x=y\,x^{y-1}\,d\,x,\; d_y=x^y\,\mathrm{L}\,x\,d\,y$

$$\therefore\; du=y\,x^{y-1}\,d\,x+x^y\,\mathrm{L}\,x\,d\,y.$$

3. $z=y^{\operatorname{sen} x\,y}$. $\quad d_x=y^{\operatorname{sen} x\,y+1}\,\mathrm{L}\,y\,\cos x\,y\,d\,x$

$$d_y=y^{\operatorname{sen} x\,y}\left(\frac{\operatorname{sen} x\,y}{y}+x\,\mathrm{L}\,y\,\cos x\,y\right)dy$$

4. $z = \text{arc tg}\,\dfrac{y}{x}$. $d_x = \dfrac{-y\,d\,x}{x^2+y^2}$, $d_y = \dfrac{x\,d\,y}{x^2+y^2}$

5. $u = \text{L arc tg}\,(x-y)$.

$$d_x = \frac{d\,x}{[1+(x-y)^2]\,\text{arc tg}\,(x-y)};\ d_y = \frac{-dy}{[1+(x-y)^2]\,\text{arc tg}\,(x-y)}$$

35. *Derivación parcial.*—La diferencial parcial respecto de x de la función

$$z = f\,(x, y),$$

se indica de destintas maneras:

$$d_x\,z = d_x\,f\,(x, y) = f'\,(x, y)\,d\,x.$$

Despejamos y obtendremos la derivada parcial

$$\frac{d_x\,z}{d\,x} = f'\,(x, y).$$

Para denotar que el segundo miembro es la derivada parcial respecto de x, se escribe

$f_x'\,(x, y)$ ó mejor, f_x'.

La derivada parcial respecto de y será

$f_x'\,(x, y)$ ó bien, f_y'.

Además de la notación abreviada, f_x', f_y', que es la más en uso, se emplea

$$f_x' = \frac{d\,z}{d\,x} = \frac{\partial\,f}{\partial\,x}, \text{ etc.}$$

36. *Funciones implícitas.*—Sea la función implícita

$$f\,(x,\,y)=0$$

Hacemos $z=f\,(x,\,y)$ y aplicamos lo dicho sobre las diferenciales parciales:

$$d_x\,z=f_x'\,(x,\,y)=f_x'\,d\,x;\ d_y\,z=f_y'\,d\,y;$$

y como la diferencial total es igual a la suma de las diferenciales parciales, tendremos,

$$d\,z=f_x'\,d\,x+f_y'\,d\,y.$$

Siendo $d\,z=d\,f\,(x,\,y)=0$, resulta:

$$f_x'\,d\,x+f_y'\,d\,y=0.$$

De aquí sacamos la derivada de una función implícita:

$$\boxed{\frac{d\,y}{d\,x}=-\frac{f_x'}{f_y'}.}$$

Es decir, la derivada de una función implícita es una fracción negativa cuyo numerador es la derivada parcial respecto de x y cuyo denominador es la derivada parcial respecto de y.

Esta fórmula es muy importante y abrevia considerablemente la derivación.

Ejercicio 386. Sea la función implícita $2x-3y+1=0$. La derivada parcial respecto de x se obtiene suponiendo que x es variable é y constante:

$$f_x'=2;$$

y para la derivada parcial respecto de y se supone x constante é y variable:

$$f_y'=-3.$$

La derivada de la función es:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x'}{f_y'}=-\frac{2}{-3}=\frac{2}{3}$$

En efecto, los métodos empleados anteriormente nos dán

$$d(2x-3y+1)=2\,dx-3\,dy=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}.$$

7. $$xy-1=0$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{f_x'}{f_y'} = -\,\frac{y}{x}\,.$$

En efecto, $d\,(x\,y-1) = x\,d\,y + y\,d\,x = 0 \;\therefore\; \frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{y}{x}.$

8. $$3\,x^2 - 2\,x\,y + 5\,y^2 - x + y = 0$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{f'_x}{f'_y} = -\,\frac{6\,x - 2\,y - 1}{-2\,x + 10\,y + 1}\,.$$

Lo que se comprueba así:

$$6\,x\,d\,x - 2\,x\,d\,y - 2\,y\,d\,x + 10\,y\,d\,y - d\,x + d\,y = 0$$

$$(6\,x - 2\,y - 1)\,d\,x + (-2\,x + 10\,y + 1)\,dy = 0$$

$$\therefore\; \frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{6\,x - 2\,y - 1}{-2\,x + 10\,y - 1}\,.$$

9. $$\frac{a\,x}{b\,y} - m\,x + n\,y\;0$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\,\frac{\dfrac{a}{b\,y} - m}{-\dfrac{a\,x}{b\,y^2} - n}\,.$$

Comprobación. $\frac{a}{b}\cdot\frac{y\,d\,x - x\,d\,y}{y^2} - m\,d\,x + n\,d\,y = 0$

390. $x^y - y^x - ab = 0$

Sabemos que $d(u^n) = n\, u^{n-1}\, d\, u$ y que $d(a^u) = a^u\, \mathrm{L}\, a\, d\, u$; luego:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = -\frac{y\,x^{y-1} - y^x\,\mathrm{L}\,y}{x^y\,\mathrm{L}\,x - x\,y^{x-1}}.$$

37. Ecuaciones de curvas notables.

Coordenadas cartesianas (x, y).

CURVAS ALGEBRAICAS

Lineas de primer grado.

391. La línea recta: $y = a\,x + b$
2. Ecuación general: $A\,x + B\,y + C = 0$

Cuadráticas ó líneas de segundo grado.

3. Círculo: $x^2 + y^2 = r^2$
4. Ecuación general: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Cónicas:

5. Elipse: $a^2\,y^2 + b^2\,x^2 = a^2\,b^2$
6. Hipérbola: $a^2\,y^2 - b^2\,x^2 = -a^2\,b^2$
7. Hipérbola equilátera: $y^2 - x^2 = -a^2$
8. Hipérbola referida a las asíntotas $x\,y = k^2$
9. Parábola: $y^2 = 2\,p\,x$

400. Ecuación general: $A\,x^2 + B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$

Cúbicas o líneas de tercer grado

1. Parábola cúbica: $y=\frac{x^3}{a^2}$
2. Parábola semicúbica: $y^2=\frac{x^3}{a}$
3. Hipérbola cúbica: $y^2=\frac{a^3}{x}$
4. Versiera: $y^2=a^2\frac{a-x}{x}$
5. Curva de Rolle: $y^2=a\frac{x+y}{x}$
6. Cúbica mixta: $y^2=a\frac{x^2+y^2}{x}$
7. Estrofoide: $y^2=x^2\frac{a-x}{a+x}$
8. Cisoide de Diocles: $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$
9. Anguinea de Newton: $x^2y+ab\,y-a^2x=0$
410. Tridente: $a\,x\,y=x^3-a^3$
1. Folium de Descartes: $x^3-3\,axy+y^3=0$
2. Trisectriz de Mac Laurin: $x\,(x^2+y^2)=a\,(y^2-3x^2)$
3. Concoide de Sluze: $a\,(x-a)\,(x^2+y^2)=k^2x^2$
4. Duplicatriz: $x^3=2\,a\,(x^2+y^2)$
5. Trebol: $y=\frac{a\,x}{3\,m}\sqrt{\frac{x+3\,m}{x-m}}$
6. Folium parabólico: $x^3=a\,(x^2-y^2)$
7. Parábola divergente: $y^2=ax^3+b\,x^2+c\,x+d$
8. Ecuación general: $A\,x^3+B\,x\,y+C\,x\,y^2+D\,y^3+E\,x^2+F\,x\,y+G\,y^2+H\,x+I\,y+J=0$

Cuárticas ó curvas de cuarto grado.

9. Concoide de Nicomedes $y^2 = \dfrac{(b+x)^2\,(a^2-x^2)}{x^2}$

420. Semniscata de Bernoulli: $(x^2+y^2)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$

1. Caracol de Pascal: $(x^2+y^2-a\,x)^2 = h^2\,(x^2+y^2)$

2. Ovalos de Descartes: $[(1-h^2)\,(x^2+y^2)+2\,ah^2\,x+k^2$
$-a^2\,h^2] = 4\,k^2\,(x_2+y^2)$

3. Parábola virtualis: $(x^2+b\,y)^2 = a^2\,(x^2-y^2)$

4. Bifolium: $(x^2+y^2)^2 = x^2\,(ax+b\,y)$

5. Cassiniana: $[(x-a)^2+y^2]\,[(x+a)^2+y^2] = b^4$

6. Curva Kappa: $x^2 = \dfrac{y^4}{a^2-y^2}$

7. Curva del Diablo: $y^4-x^4-96\,a^2\,y^2+100\,a^2\,x^2=0$

8. Cruciforme: $y = \dfrac{b\,c}{\sqrt{x^2-a^2}}$

9. Bicornio: $y = \dfrac{a^2-x^2}{2\,a \pm \sqrt{a^2-x^2}}$

430. Trifolio: $(x^2+y^2)^2 = 2\,a\,x\,(x^2-y^2)$

1. Curva ocho: $y^4 \quad y^2-x^2$

2. Ecuación general: $A\,x^4+B\,x^3\,y+C\,x^2\,y^2+D\,x\,y^3$
$+E\,y^4+F\,x^3+G\,x^2\,y+H\,x$
$y^2+I\,y^3+J\,x^2+K\,x\,y+L\,y^2$
$+M\,x+N\,y+P=0$

Quínticas o curvas de quinto grado

$$x^5+y^5-5\,a^2\,x^2\,y=0$$

Séxticas o curvas de sexto grado

4. Perla indiana: $(x^2+y^2)^3-a^2\,x^2\,y^2=0$

5. Atriftaloide: $x^4\,(x^2+y^2)=(h\,x^2-k^3)^2$

6. Astroide: $(x^2+y^2-l^2)^3+27\,l^2\,x^2\,y^2=0$

7. Escarabajo: $(x^2+y^2+a\,x)^2\,(x^2+y^2)=b^2\,(x^2$
$+y^2)$

8. Curva de Watt: $(x^2+y^2)^3-2\,B^2\,(x^2+y^2)^2+(B^4$
$+4\,a^2\,y^2)\,(x^2+y^2)-4\,a^2\,b^2$
$y^2=0$

9. Curva de Talbot: $[3(a^2 x^2+b^2 y^2)-4(a^4+b^4-a^2 b^2)]^3-[9(2b^2-a^2)a^2 x^2+9(2a^2-b^2)b^2 y^2-4(2a^4+2b^4-5a^2 b^2)]^2=0$

Bicuárticas o curvas de octavo grado.

440. Curva equipotencíal: $\{a^2 m^2 [(x-a)^2+y^2]+a^2 m'^2 (x^2+y^2)-k^2 (x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]\}=4a^4 m^2 m'^2 (x^2+y^2)[(x-a)^2+y^2]$

CURVAS TRASCENDENTES

1. Logarítmica: $y=a e^{x:m}$
2. Curva de probabilidad: $y=e^{-x^2}$
3. Catenaria: $y=\frac{1}{2} a (e^{x:a}+e^{-x:a})$
4. Tractoria: $x=\sqrt{c^2-y^2}+\frac{1}{2} c \, \mathrm{L} \frac{c-\sqrt{c^2-y^2}}{c+\sqrt{c^2-y^2}}$
5. Syntractoria: $x=a \, \mathrm{L} \frac{b+\sqrt{b^2-y^2}}{y}-\sqrt{b^2-y^2}$
6. Sinusoide: $y=a \operatorname{sen} \frac{x}{m}$
7. Cuadratriz de Dinostrato: $y=(a-x)\cot \frac{\pi x}{2a}$
8. Cicloide: $x=r \arccos \frac{r-2y}{r}-\sqrt{2ry-y^2}$
9. Hipocicloide tetracuspidal: $\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}}=1$

450. Hipocidoide tricuspidal:

$$(x^2+y^2)^2+8rx(3y^2-x^2)+18r^2(x^2+y^2)-27r^4=0$$

COORDENADAS POLARES (r, t)

Espirales.

1. de Arquímedes: $r = \frac{a}{2\pi} t$
2. de Galileo: $r = a - b t^2$
3. de Fermat: $r^2 = a^2 t$
4. parabólica: $(r-a)^2 = 2 p a t$
5. hiperbólica: $r = \frac{a}{t}$
6. elíptica: $\sqrt{a^2 - b^2}\, t = a. \text{ arc cos } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r}$
7. de Poinsot: $r = \frac{2a}{e^{mt} + e^{-mt}}$
8. logarítmica: $r = a e^{mt}$
9. Tractriz: $t = \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r}$

460. Lituo: $r^2 t = a^2$

1. Coc leoide: $r = a \frac{\text{sen } t}{t}$
2. Cardioide: $r = a \cos t + a$
3. Trocoide: $y = a - b \cos t, \quad x = at - b \,\text{sen}\, t$
4. Epicidoide: $\begin{cases} x = (R+r) \cos a - r \cos \frac{R+r}{r} a \\ y = (R+r) \text{ sen } a - r \text{ sen } \frac{R+r}{r} a \end{cases}$
5. Hipocicloide: $\begin{cases} x = (R-r) \cos a + r \cos \frac{R-r}{r} a \\ y = (R-r) \text{ sen } a - r \text{ sen } \frac{R-r}{r} a \end{cases}$

38. *Conclusión general.*—Las diversas funciones que se estudian, para su diferenciación, en los textos corrientes de Cálculo, estan comprendidas en la función exponencial

$$y = u^v,$$

en la que u y v son funciones de x.

Lo que se puede hacer ver claramente, porque suponiendo que el exponente es constante é igual á n, se obtiene la potencia

$$y = u^n,$$

que comprende las funciones fraccionarias (u^{-n}) y las raices $\left(u^{\frac{1}{n}}\right)$ de u; si la base es constante, aparecen las exponenciales (a^v, e^v) y sus inversas, las logarítmicas (L u, log u); y, aplicado el signo L á las anteriores, se forman el producto (uv) y el cuociente $(u : v)$ de funciones de x; por último, el signo $i = \sqrt{-1}$, puesto en el exponente, nos da las funciones trigonométricas $(e^{ix} + e^{-ix})$, las circulares (arc sen x); las hipérbolicas ($s\,h\,x$), etc. De modo que la diferenciación de u^v ó de su transformada logarítmica v L u, ó, en último término, de L u, acarrea la de todas las funciones enumeradas.

Esta serie de consideraciones nos ha conducido a establecer como fundamental la regla de la diferenciación de $y =$ L u.

La segunda regla se deduce sin dificultad de la forma simple ó compuesta que puede afectar una función, según que la variable x esté sometida a una o más operaciones.

En tanto que las primeras son de inmediata diferenciación, las segundas, para poder diferenciarlas, hay que transformarlas en funciones simples.

Ahora bien, las funciones compuestas no pueden ser más que monomias ó polinomias. Si aplicamos logaritmos (L) a

las primeras, se descomponen en polinomios o suma de funciones, cuyos términos son de fácil diferenciación.

Por ejemplo, sea una función compuesta de x, en la que la variable x está sometida a diferentes signos de operación, tal como

$$y=\sqrt[5]{\frac{a\,x^3}{b-cx}}.$$

Aplicamos L y se descompone en un polinomio de términos sencillos:

$$\mathrm{L}\,y=\tfrac{1}{5}\,[\,\mathrm{L}\,a+3\,\mathrm{L}\,x-\mathrm{L}\,(b-c\,x)\,].$$

En consecuencia, para diferenciar toda clase de funciones, basta construir dos reglas: la primera servirá para descomponer una función monomia en una suma de funciones, y la segunda, se empleará para diferenciar dicha suma, como lo indica la fórmula

$$d\,(u+v)=du+dv.$$

Las nociones anteriores fueron bosquejadas en un artículo que publiqué en la *Revista de Matemáticas* de Santiago (año de 1904). Hoy me complazco en darles una forma más acabada y correcta, para lo cual he consultado los diferentes autores cuyos nombres aparecen en el curso de este trabajo.

Valparaíso, Diciembre 17 de 1913.

